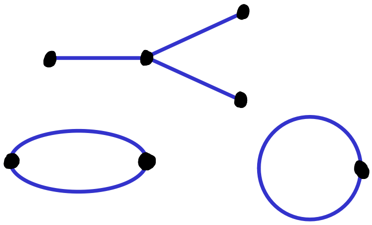
Teorema de Gabriel para representações de quivers

Adriana Mayumi Shiguihara

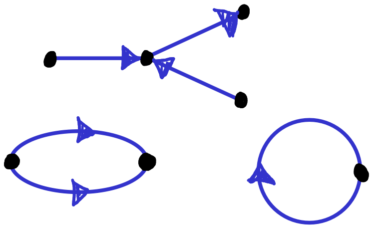
Definições

Um quiver ou uma aljava é um grafo orientado.

grafos



grafos orientados

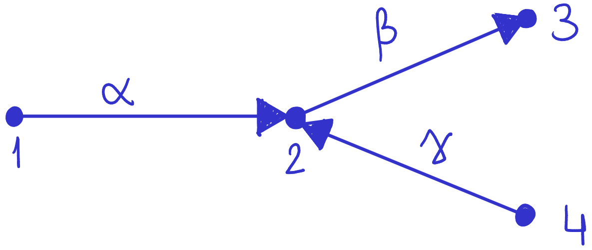


Consideraremos conexo.

Fixaremos corpo alg. fechado $\mathbf{k}$.

Definições

$Q =$



Caminhos

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \gamma\beta\}$

base do K-e.v. KQ

multiplicação = concatenação (ou 0)

$\alpha \cdot \beta = \alpha\beta, \quad e_1 \cdot \alpha = \alpha, \quad \alpha \cdot \gamma = 0$

KQ = álgebra de caminhos de Q

Definições

quiver $Q = (\overset{\text{vértices}}{Q_0}, \overset{\text{arestas}}{Q_1}, \underset{\text{"source"}}{s}, \underset{\text{"target"}}{t})$

s, t são funções $Q_1 \to Q_0$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \end{tikzcd}$$

$s(\alpha) = 1, \quad t(\alpha) = 2$

grafo subjacente de Q: $\Gamma(Q)$

$$\Gamma(Q) = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, dash, "\beta"] & 3 \end{tikzcd}$$

Definições

representação V de Q:

- vértice i $\rightsquigarrow$ K-espaço vetorial V_i

  (consideraremos dimensão finita)

- aresta α $\rightsquigarrow$ transformação linear

  $$V_\alpha : V_{s(\alpha)} \longrightarrow V_{t(\alpha)}$$

---

vetor dimensão de V:

$$d(V) := (\dim V_i)_{i \in Q_0}$$

$V = 0$ se $d(V) = 0$

Definições

$$Q = \begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "\alpha"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[r, "\beta"] & \overset{3}{\bullet} \end{tikzcd}$$

Uma representação V de Q:

$$\begin{tikzcd} \overset{V_1 = K^2}{\bullet} \arrow[r, "V_\alpha", "(\lambda,\mu)\mapsto\lambda"'] & \overset{V_2 = K}{\bullet} \arrow[r, "V_\beta", "\lambda\mapsto 0"'] & \overset{V_3 = K}{\bullet} \end{tikzcd}$$

$$d(V) = (2, 1, 1)$$

Definições

V, W representações de Q

Um morfismo de representações

$\varrho : V \longrightarrow W$ é uma coleção $\varrho = (\varrho_i)_{i \in Q_0}$ tq

* $\varrho_i : V_i \to W_i$ linear $\forall$ vértice i

* $\forall$ aresta α,

$\varrho_{t(\alpha)} V_\alpha = W_\alpha \varrho_{s(\alpha)}$

$$\begin{tikzcd}
V_{s(\alpha)} \arrow[r, "V_\alpha"] \arrow[d, "\varrho_{s(\alpha)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "\varrho_{t(\alpha)}"] \\
W_{s(\alpha)} \arrow[r, "W_\alpha"'] & W_{t(\alpha)}
\end{tikzcd}$$

Definições

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
K \arrow[r, "\lambda \mapsto (\lambda, 0)"] \arrow[d, dashed, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & K^2 \arrow[d, dashed] \\
K \arrow[r, "1"'] & K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c} (\lambda, 0) \\ \downarrow \\ \lambda \end{array}$$

ρ é isomorfismo se todos os ρ_i o são. (notação: $V \cong W$)

Definições

$\text{rep}_{\Bbbk} Q$ = categoria das representações de Q (dim. finita)

$\Bbbk Q$-mod = categoria dos $\Bbbk Q$-módulos f.g.

São equivalentes.

Definições

soma direta $V \oplus W$ de $V, W \in \operatorname{rep} Q$:

★ **vértice** $i \rightsquigarrow (V \oplus W)_i := V_i \oplus W_i$

★ **aresta** $\alpha \rightsquigarrow (V \oplus W)_\alpha$ def. por

$$\begin{aligned} (V \oplus W)_{s(\alpha)} &\longrightarrow (V \oplus W)_{t(\alpha)} \\ (v, w) &\longmapsto (V_\alpha(v), W_\alpha(w)) \end{aligned}$$

$$(V \oplus W)_\alpha = \begin{bmatrix} V_\alpha & 0 \\ 0 & W_\alpha \end{bmatrix}$$

Definições

$V \in \operatorname{rep} Q$ é indecomponível se

$\nexists\ V', V'' \in \operatorname{rep} Q$ não nulas tq

$$V \cong V' \oplus V''.$$

representações indecomponíveis de $\bullet \longrightarrow \bullet$:

$$K \xrightarrow{v \mapsto \lambda v} K \qquad 0 \xrightarrow{0} K \qquad K \xrightarrow{0} 0$$

$\lambda \in K \setminus \{0\}$

Teorema de Krull-Schmidt

$V \in$ rep Q se decompõe de forma única como soma direta de representações indecomponíveis de Q.

Teorema de Krull-Schmidt

⋆ $\exists\, V^{(1)}, \dots, V^{(r)} \in \operatorname{rep} Q$ indec. tq

$$V \cong V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus \dots \oplus V^{(r)}$$

⋆ Sejam $W^{(1)}, \dots, W^{(s)} \in \operatorname{rep} Q$

indec. tq $V \cong W^{(1)} \oplus \dots \oplus W^{(s)}$

$$\Longrightarrow \quad r = s, \quad V^{(j)} \cong W^{(j)} \ \forall j$$

(possivelmente reordenando os $W^{(j)}$)

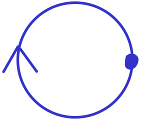
Mais definições

Q é de **tipo finito** se o **# de representações indecomponíveis** de Q (a menos de isomorfismo) é **finito**.

$\bullet \longrightarrow \bullet$ tem tipo finito

$$K \xrightarrow{1} K \qquad 0 \xrightarrow{0} K \qquad K \xrightarrow{0} 0$$

Mais definições

 não tem tipo finito!

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "V_\alpha"] \arrow[d, dashed, "A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V_1 \arrow[d, dashed, "A"] \\ W_1 \arrow[r, "W_\alpha"'] & W_1 \end{tikzcd}$$

$V \cong W \iff \exists$ iso. A tq

$$V_\alpha = A^{-1} W_\alpha A$$

classes de indecomponíveis correspondem aos blocos de Jordan

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$\lambda \in K \setminus \{0\}$

Mais definições

forma de Tits de Q :

$$q_Q : \mathbb{Z}^{Q_0} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Se $x = (x_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$,

$$q_Q(x) := \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}$$

Mais definições

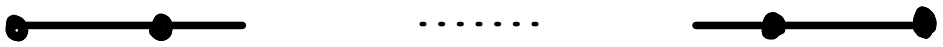
$$q_Q(x) := \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}$$

$$Q = \begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[r, "\alpha"] & \underset{2}{\bullet} & \underset{3}{\bullet} \arrow[l, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

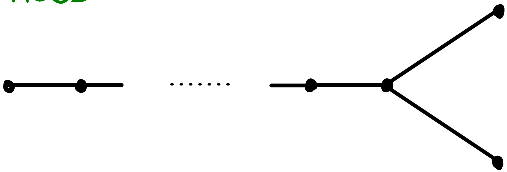
$$q_Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \underbrace{- x_1 \cdot x_2}_{\alpha} \underbrace{- x_3 \cdot x_2}_{\beta}$$

Mais definições

grafos de Dynkin de tipos A, D, E :

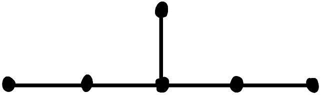
A_n, $n \geq 1$ 

\# de vértices

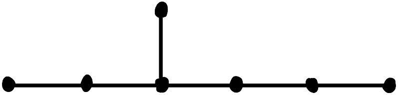
D_n, $n \geq 4$ 

Mais definições

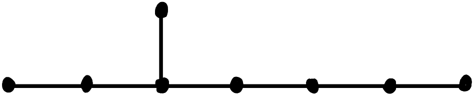
E_6



E_7



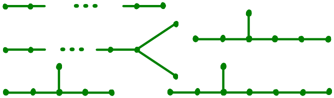
E_8



Teorema de Gabriel

Q quiver conexo. São equivalentes:

(1) Q é de tipo finito.



(2) $\Gamma(Q)$ é grafo de Dynkin.

(3) q_Q é positiva definida.

$x \in \mathbb{Z}^{Q_0}$, $x \neq 0 \implies q_Q(x) > 0$

Geometria Algébrica

espaço afim $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} := \underbrace{\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}}_{n \text{ vezes}}$

- ★ variedades algébricas, morfismos
- ★ dimensão

matrizes $m \times n$: $M_{m \times n}(\mathbb{K}) = \mathbb{A}^{m \cdot n}$

$\parallel$

transformações lineares $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

Geometria Algébrica

grupo algébrico: grupo + variedade
(+ algumas condições)

ação de grupos algébricos: ação de grupos de um grupo alg. sobre variedade + morfismo

Se G age sobre a variedade X por uma ação de grupos algébricos e $x \in X$, então

$$\dim G = \dim \underbrace{G \cdot x}_{= \{g \cdot x : g \in G\}} + \dim \underbrace{G_x}_{= \{g : g \cdot x = x\}}$$

Espaço de representações

Fixemos vetor dimensão $v = (v_i)_{i \in Q}$.

representação x com $d(x) = v$

- vértice $i \rightsquigarrow x_i := \mathbb{K}^{v_i}$
- aresta $\alpha \rightsquigarrow x_\alpha \in M_{v_{t(\alpha)} \times v_{s(\alpha)}}(\mathbb{K})$

espaço de representações de dimensão v

$$R(v) := \prod_{\alpha \in Q_1} M_{v_{t(\alpha)} \times v_{s(\alpha)}}(\mathbb{K})$$

Espaço de representações

isomorfismos de $\mathbb{K}$-e.v. de dim. n $= GL_n(\mathbb{K})$

$X, X' \in R(v)$.

$$GL_{v_i}(\mathbb{K})$$
$$\Psi$$
$$X \cong X' \iff \exists\, g = (g_i)_{i \in Q_0} \text{ tq}$$

$$\begin{tikzcd}
X_{s(\alpha)} \arrow[r, "X_\alpha"] \arrow[d, "g_{s(\alpha)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_{t(\alpha)} \arrow[d, "g_{t(\alpha)}"] \\
X'_{s(\alpha)} \arrow[r, "X'_\alpha"'] & X'_{t(\alpha)}
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{X_\alpha = g_{t(\alpha)} X'_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1}}$$

$$\forall \alpha.$$

Espaço de representações

$$\boxed{GL(v) := \prod_{i \in Q_0} GL_{v_i}(k)}$$

grupo alg. de dimensão $\sum_{i \in Q_0} v_i^2$

ação de gr. alg. de $GL(v)$ sobre $R(v)$:

$$\boxed{\underset{\underset{(g_i)_{i\in Q_0}}{\parallel}}{g} \cdot x := \left(g_{t(\alpha)} x_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1}\right)_{\alpha \in Q_1}}$$

Tipo finito $\Rightarrow$ q_Q positiva definida

$$\begin{matrix}\text{classes das rep.} \\ \text{de dimensão } v\end{matrix} \quad \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \quad \begin{matrix}\text{órbitas} \\ GL(v)\cdot x\end{matrix}$$

tipo finito $\Rightarrow$ # de órbitas finito

$$\Rightarrow \exists\, x \in R(v) \text{ tq } \dim\left(GL(v)\cdot x\right) = \dim R(v) = \sum_{\alpha \in Q_1} v_{t(\alpha)} v_{s(\alpha)}$$

$$R(v) = \prod_{\alpha \in Q} M_{v_{t(\alpha)} \times v_{s(\alpha)}}(\mathbb{K})$$

Tipo finito $\Rightarrow$ q_Q positiva definida

$$
\begin{aligned}
q_Q(v) &= \sum_{i\in Q_0} v_i^2 - \sum_{\alpha\in Q_1} v_{t(\alpha)} v_{s(\alpha)} \\
&= \dim GL(v) - \dim\left(GL(v)\cdot x\right) \\
&= \dim GL(v)_x \geq 1 .
\end{aligned}
$$

$$\{(\lambda \mathrm{Id}_{V_i})_{i\in Q_0},\ \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}\} \subseteq GL(v)_x$$

$\blacksquare$

Obrigada!

$\Gamma(Q)$ Dynkin $\Rightarrow$ tipo finito

raízes de Q: elementos $\alpha \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ tq $q_Q(\alpha) = 1$.

isoclasses de rep. indecomp. de Q $\xleftrightarrow{1:1}$ raízes positivas de Q

\# de raízes é finito $\Longrightarrow$ Q tem tipo finito.

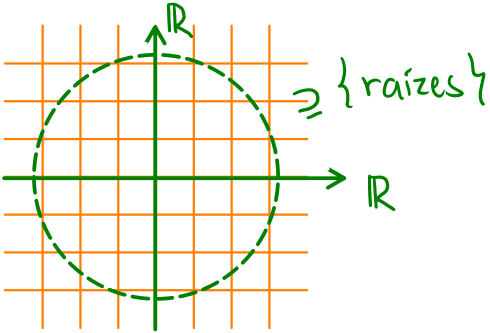
$\Gamma(Q)$ Dynkin $\Rightarrow$ tipo finito

$q_Q : \mathbb{R}^{Q_0} \longrightarrow \mathbb{R}$

finito

$\|x\|_Q := \sqrt{q_Q(x)}$ é norma em $\mathbb{R}^{Q_0}$.

$\|\cdot\|_Q$ equivale à norma eucliana



$\blacksquare$

Obrigada!